수학 영역 (가형)

5지 선다형(1 ~ 21)

1. 전체집합 U의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 5, 7\}$, $B=\{3, 5, 7\}$에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2. $\log_6 2+\log_6 3$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+5)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\sum_{k=1}^{30} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{30} b_k=20$일 때, $\sum_{k=1}^{30}(a_k+2b_k)$의 값은? [3점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

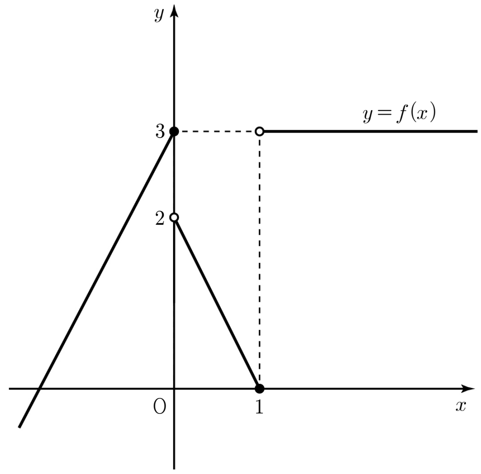
5. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=2$, $a_3=4$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

6. 정의역이 $\{x \mid -3 \le x \le 5\}$인 무리함수 $y=\sqrt{x+4}+5$의 최솟값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$일 때, $A \cap B=\varnothing$을 만족시키는 집합 B의 개수는? [3점]

① 8　② 16　③ 32　④ 64　⑤ 128

9. 실수 x에 대하여 두 조건 $p,\ q$가

$p: 1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 5$,

$q: x \geq \alpha$

일 때, p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 α의 최솟값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

10. 유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. $p-q$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

11. 집합 $X=\{-2,\,-1,\,3\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x<0) \\ 3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 항등함수가 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

12. 수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고, 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는? [3점]

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

13. 폭약에 의한 수중 폭발이 일어나면 폭발 지점에서 가스버블이 생긴다. 수면으로부터 폭발 지점까지의 깊이가 $D(\mathrm{m})$인 지점에서 무게가 $W(\mathrm{kg})$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R(\mathrm{m})$라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

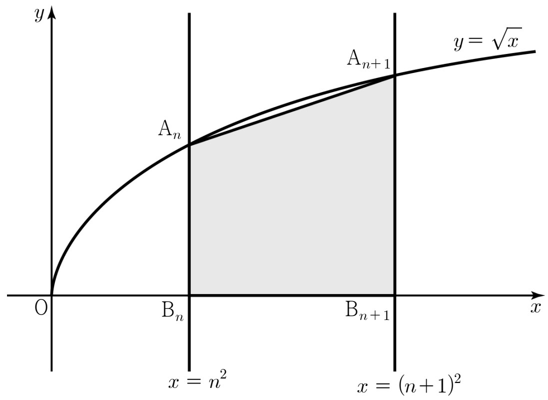
$$R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (단, k는 양의 상수이다.)

수면으로부터 깊이가 $d(\mathrm{m})$인 지점에서 무게가 $160\,\mathrm{kg}$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_1(\mathrm{m})$이라 하고, 같은 폭발 지점에서 무게가 $p(\mathrm{kg})$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_2(\mathrm{m})$라 하자.

$\frac{R_1}{R_2}=2$일 때, p의 값은? (단, 폭약의 종류는 같다.) [3점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

14. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $x=n^2$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A_n, x축과 만나는 점을 B_n이라 하고, 직선 $x=(n+1)^2$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A_{n+1}, x축과 만나는 점을 B_{n+1}이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은? [4점]

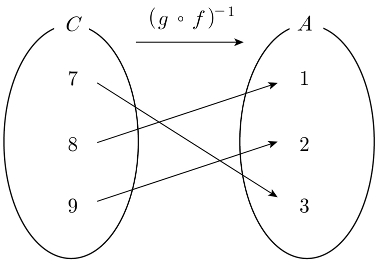


① 885 ② 890 ③ 895 ④ 900 ⑤ 905

15. 세 집합

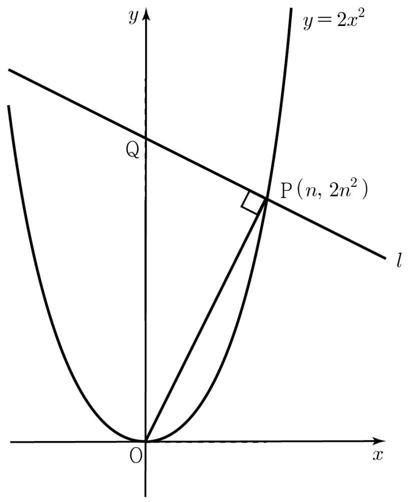
$$A=\{1, 2, 3\},\ B=\{4, 5, 6\},\ C=\{7, 8, 9\}$$

에 대하여 두 함수 $f: A\to B$와 $g: B\to C$가 일대일 대응이다. 함수 $(g \circ f)^{-1}: C\to A$가 그림과 같고 $f(1)=4$, $g(6)=9$일 때, $f(2)+g(5)$의 값은? [4점]



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

16. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(n, 2n^2)$을 지나고 선분 OP에 수직인 직선 l이 y축과 만나는 점을 Q라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OQ}})$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

17. 두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 X를

$$X=\{x \mid x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x는\ 실수\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\dfrac{1}{n}$일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k a_{k+1})^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1})^2+2(a_{n+1}-1) \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때,

(좌변)= $\boxed{(가)}$ =(우변)이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\,(m\geq 1)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_k a_{k+1})^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2+2(a_{m+1}-1)$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}(a_k a_{k+1})^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k a_{k+1})^2+(a_{m+1}a_{m+2})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2+2(a_{m+1}-1)+(a_{m+1}a_{m+2})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2+2\left(\frac{1}{m+1}-1\right)+\left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{m+1}(a_{k+1})^2+2\left(\frac{1}{m+1}-1-\boxed{(나)}\right)$$

⋮

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\dfrac{p}{f(14)}$의 값은? [4점]

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

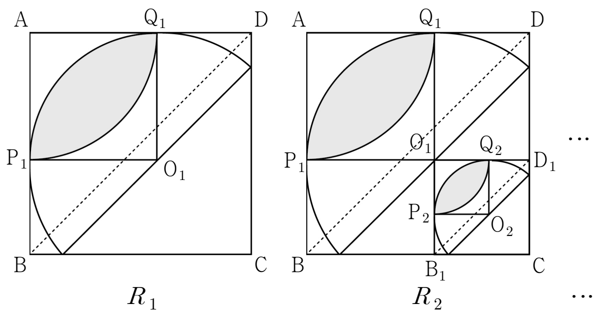
19. 자연수 k에 대하여

$$a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^{n}}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^{n} + 1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 지름의 양 끝점이 각각 변 BC, 변 CD 위에 있고, 지름이 선분 BD와 평행한 반원을 내접하게 그린다. 이 반원의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하고 반원이 두 변 AB, AD와 만나는 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하자. 중심이 A, 반지름이 선분 $\mathrm{AP_1}$, 중심각이 $\angle \mathrm{P_1AQ_1}$인 부채꼴의 내부와 이 반원의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 있는 점 $\mathrm{O_1}$에서 두 변 BC, CD 위에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$이라 하고 네 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{B_1}$, C, $\mathrm{D_1}$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{O_1B_1CD_1}$을 그린다. 정사각형 $\mathrm{O_1B_1CD_1}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = (p\sqrt{2}-q)(\pi-2)$이다.
두 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [4점]



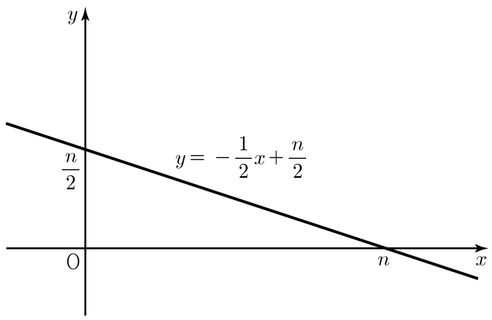
① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

21. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 연립부등식

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -\frac{1}{2}x+\frac{n}{2}$$

의 영역의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]

① 945 ② 946 ③ 947 ④ 948 ⑤ 949



단답형(22 ~ 30)

22. 함수 $f(x)=2x+3$에 대하여 $(f \circ f)(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+8n+10}-n\right)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-5)=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3)$의 값을 구하시오. [3점]

25. $a>1$일 때, $9a+\frac{1}{a-1}$의 최솟값을 구하시오. [3점]

26. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $x=\log_2 a$, $y=\log_2 b$라 하면 $x^2-4xy+y^2=0$이 성립한다. $\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}}$의 값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. [4점]

27. 세 실수 a, b, c에 대하여 $3^a = 4^b = 5^c$이고 $ac = 2$일 때, 4^{ab+bc}의 값을 구하시오. [4점]

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - 5x}{x^2 - 4}$ 의 값이 존재한다. (나) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{f(x)} - 3x + 1 \right)$의 값이 존재한다.

$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 일반항이 $a_n = 2n+1$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합 $A_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$는 $A_1 = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A_k는 수열 $\{a_n\}$의 항들 중 $(2k+3)$개의 연속한 항들을 원소로 하는 집합이다.
(나) 집합 A_{k+1}의 가장 작은 원소는 집합 A_k의 가장 작은 원소보다 크다.
(다) $n(A_k - A_{k+1}) = 3$

예를 들어 $A_2 = \{9,\ 11,\ 13,\ \cdots,\ 21\}$이다. $A_{15} \cap A_p = \varnothing$ 을 만족하는 15보다 큰 자연수 p의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. 실수 t에 대하여 정의역이 $\{x \mid 8 \le x \le 10\}$인 함수

$$f(x) = x^2 - 18x + 2|x-t| + 80$$

의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $h(t) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}$ 이라 할 때, 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.