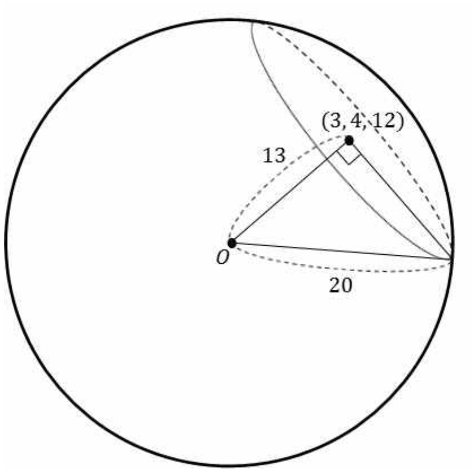
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(1)-1번

1.



원 C의 중심 $(3,4,12)$와 원점과의 거리 $=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$ 이다.

따라서 C의 반지름 $=\sqrt{20^2-13^2}=\sqrt{231}$ 이고, C의 넓이는 231π이다.

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터를 $(4,5,-20)$, 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터를 $(3,4,12)$로 택하자. 두 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\cos\theta=\frac{|(3,4,12)\bullet(4,5,-20)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}\sqrt{4^2+5^2+(-20)^2}}=\frac{16}{21}$$ 이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $231\pi\cdot\frac{16}{21}=176\pi$ 이다.

2. 평면 α의 방정식은 $z=my$또는 $y=0$ ($xz-$평면)라 할 수 있다. 따라서 α의 법선벡터는 $(0,m,-1)$ 또는 $(0,1,0)$로 택할 수 있다. 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|(0,m,-1)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+m^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}} \text{ 또는 } \frac{|(0,1,0)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}} \text{ 또는 } \frac{4}{13}$$이다.

$\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}}$는 $m=-\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$을 갖는다. 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}=\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

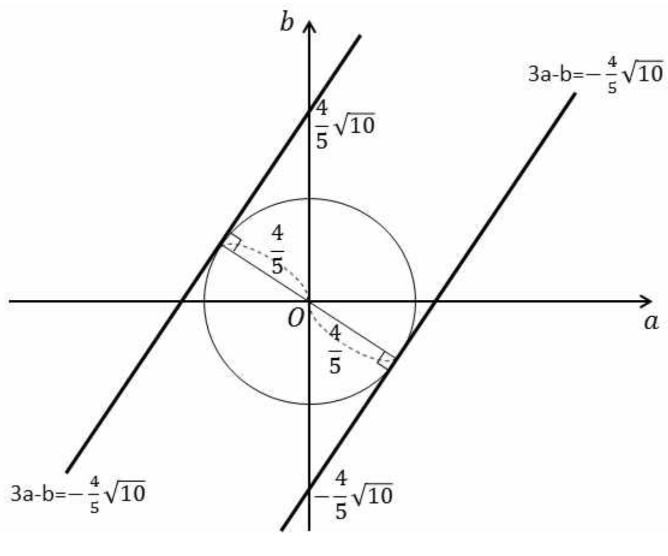
(다른 풀이) 평면 α의 방정식은 $(\cos t)y+(\sin t)z=0$이라 할 수 있고, 따라서 $(0,\cos t,\sin t)$를 α의 법선벡터로 택하자. 평면 α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\frac{A_\alpha}{A}=\cos\theta=\frac{|(0,\cos t,\sin t)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+\cos^2 t+\sin^2 t}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|4\cos t+12\sin t|}{13}=\frac{4\sqrt{10}}{13}\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\cos t+\frac{3}{\sqrt{10}}\sin t\right|$$

$$=\frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin\beta\cos t+\cos\beta\sin t|=\frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin(\beta+t)|\le\frac{4}{13}\sqrt{10}$$

(단, β는 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$을 만족한다.) 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

3. 원이 놓여 있는 평면의 단위 법선벡터를 (a,b,c)라 하자. ($a^2+b^2+c^2=1$이다.) 원의 $xy-$평면 위로의 정사영의 넓이 $=6\pi=\frac{|(0,0,1)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\sqrt{10^2}\pi=|c|\cdot10\pi$ 이다. 따라서 $|c|=\frac{3}{5}$이고, $a^2+b^2=1-c^2=\frac{16}{25}$이다.



원의 평면 $3x-y=1$위로의 정사영의 넓이

$$=\frac{|(3,-1,0)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\pi(\sqrt{10})^2=\sqrt{10}\pi|3a-b|$$

이다.

$|3a-b|=k$라 하면, a, b는 $a^2+b^2=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$을 만족하므로,

k의 최댓값은 $\frac{4}{5}\sqrt{10}$이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{10}\pi\cdot\frac{4}{5}\sqrt{10}=8\pi$

이다.